9/6/2017

3º Θεώρημα Ισομορφισμών δακτυλίων

Έστω I, J : ιδεώδη του δακτυλίου R ώστε $I \subseteq J$. Τότε το $J\backslash I = \{x+I \in R\backslash I : x \in J\}$ είναι ένα ιδεώδες του $R\backslash I$ και υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων:

$$R\backslash I \big\backslash J\backslash I \simeq R\backslash J$$

Απόδειξη: Η απεικόνιση $\varphi : R\backslash I \to R\backslash J$ είναι καλά ορισμένη και είναι επιμορφισμός δακτυλίων και $Ker(\varphi) = J\backslash I$. Από το 1º Θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων

$$\Rightarrow R\backslash I \big\backslash J\backslash I \simeq R\backslash J$$

4º Θεώρημα Ισομορφισμών δακτυλίων: Έστω $\varphi : R \to R'$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων τότε οι απεικονίσεις:

$$\Phi : \{ \underset{\text{ιδεώδη}}{I \subseteq R} \mid Ker(\varphi) \subseteq I \} \rightleftarrows \{K \subseteq R'\} : \Psi$$

όπου $\Phi(I) = \varphi(I)$ και $\Psi(K) = \varphi^{-1}(K)$ είναι 1-1 και επί και $\Psi = \Phi^{-1}$

Εφαρμογή: Έστω I: ιδεώδες ενός δακτυλίου R.

Τι μορφή έχουν τα ιδεώδη του R/I;

Θεωρούμε τον επιμορφισμό δακτυλίων $\pi: R \to R/I$

με $\pi(x) = x + I$ και τότε γνωρίζουμε ότι $\ker(\pi) = I$

Από 4º Θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων $\Rightarrow$

τα ιδεώδη του R/I είναι της μορφής $\pi(J) = J/I$

όπου J: ιδεώδες του R ώστε $I \subseteq J$

Παράδειγμα: Τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Τότε

θα έχουμε ότι τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = J/n\mathbb{Z}$ όπου

J: ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ ώστε να περιέχει το $n\mathbb{Z} \subseteq J$

Επειδή το J είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z} \Rightarrow \exists m \geq 0$:

$J = m\mathbb{Z}$. Άρα, τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ είναι της

μορφής $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ όπου $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid n$.

Τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ είναι τα $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ όπου

$m \mid n$

Όμως $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xRightarrow{3^{o}\ \Theta.\text{Ι.Δ}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = \left|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right| = \frac{|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|}{|m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|} = \frac{n}{m}$$

Άρα, $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{m}}$

Παράδειγμα: $T_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$: ιδεώδες του $T_2(\mathbb{R})$

$J = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$: ιδεώδες του $T_2(\mathbb{R})$

$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$: ιδεώδες του $T_2(\mathbb{R})$

Για το K: (i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$

(ii) αν $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} \in K$ τότε

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y-y' \\ 0 & z-z' \end{pmatrix} \in K$$

(iii) Έστω $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$ και $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in K$

Τότε $\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y-y' \\ 0 & z-z' \end{pmatrix} \in K$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in K,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \cdot c \\ 0 & z \cdot c \end{pmatrix} \in K$$

Με ποίους γνωστούς μας δακτυλίους είναι ισόμορφοι οι δακτύλιοι $T_2(\mathbb{R})/I$, $T_2(\mathbb{R})/J$, $T_2(\mathbb{R})/K$

$T_2(\mathbb{R})/I$: A $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' & 0 \\ 0 & c \cdot c' \end{pmatrix}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : T_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$ επιμορφισμός δακτυλίων

και $\ker(\varphi) = I$. Τότε από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών δακτυλίων

$\Rightarrow T_2(\mathbb{R})/I \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$T_2(\mathbb{R})/J$: $g : T_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = c$, g: επιμορφισμός δακτυλίων με $\ker(g) = J$

Από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών δακτυλίων

$\Rightarrow T_2(\mathbb{R}) / J \cong \mathbb{R}$

• $T_2(\mathbb{R})/K$: $h : T_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = a$

h: επιμορφισμός με $\ker(h) = K$. Από 1ο Θεώρημα ισομορφισμών

$T_2(\mathbb{R})/K \cong \mathbb{R}$

Παράδειγμα: $\mathbb{R}[x] / (x^2+1)$

$I := (x^2+1) = \{A(x)\cdot(x^2+1) \in \mathbb{R}[x] \mid A(x) \in \mathbb{R}[x]\}$

$x^2 + I \in \mathbb{R}[x]/I$. Τότε $x^2 = x^2+1-1 \Rightarrow x^2 + I = (x^2+1) - 1 + I$

$= -1 + I = -(1+I) = -1_{\mathbb{R}[x]/I}$. Άρα $(x+I)^2 = -1_{\mathbb{R}[x]/I}$ (*)

Έστω $P(x) + I \in \mathbb{R}[x]/I$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση

πολυωνύμων: $P(x) = A(x)\cdot(x^2+1) + R(x)$, όπου είτε $R(x) = 0$ είτε

$\deg R(x) \leq 1$. Αν $R(x) \neq 0$. Τότε $R(x) = a + bx$. Τότε

$P(x) + I = A(x)\cdot(x^2+1) + (a+bx) + I$

Άρα $P(x) + I = (a+bx) + I$ όμοια $Q(x) + I = (c+dx) + I$

$(P(x)+I) + (Q(x)+I) = (P(x)+Q(x)+I) = [(a+c) + (b+d)x] + I$

$(P(x)+I)\cdot(Q(x)+I) = [(a+bx)+I]\cdot[(c+dx)+I] = [ac + adx + bcx + bdx^2] + I$

Scanned by CamScanner

$= [ac + bdX^2 + (ad+bc)X] + I \overset{*}{=} [(ac-bd) + (ad+bc)X] + I$

Ορίζουμε απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, με $\varphi(P(x)) = P(i)$

Δηλαδή αν $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$\varphi(P(x)) = P(i) = a_0 + a_1 \cdot i + \dots + a_n \cdot i^n$$

Τότε η φ: επιμορφισμός δακτυλίων και ο πυρήνας
$Ker(\varphi) = I$. Τότε από 1ο Θεώρημα ισομορφισμών

$\Rightarrow \mathbb{R}[x] / x^2 + I \cong \mathbb{C}$

Παράδειγμα: $R = \mathbb{Z}$, $I = 6\mathbb{Z}$, $J = 2\mathbb{Z}$

Τότε: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$: σώμα

όχι σώμα
ούτε ακέραια
περιοχή

Πρόταση: Ένας δακτύλιος R είναι σώμα αν-ν ο R είναι
μεταθετικός απλός δακτύλιος

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω ότι R σώμα. Έστω I ιδεώδες
του R με $I \neq \{0\}$. Θα δείξω ότι $I = R$

Αφού $I \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in I : x \neq 0$. Επειδή R: σώμα $\Rightarrow x \in U(R)$ και τότε $x \in I \cap U(R) \Rightarrow I = R \Rightarrow R$: απλός

($\Leftarrow$) Έστω R: μεταθετικός απλός δακτύλιος. Έστω $x \in R$ και $x \neq 0$

Έστω $(x) = \{x \cdot r \in R \mid r \in R\}$: το κύριο ιδεώδες του R το οποίο παράγεται από το x. Επειδή $x \neq 0$, $x \in (x) \Rightarrow (x) \neq \{0\}$

Επειδή R: απλός $\Rightarrow (x) = R$. Τότε $1_R \in R = (x)$

$\Rightarrow \exists r \in R : 1_R = x \cdot r = r \cdot x \Rightarrow x$: αντιστρέψιμος. Άρα R: σώμα

Ορισμός: Αν R: μεταθετικός δακτύλιος και I: ιδεώδες του R τότε το I καλείται πρώτο ιδεώδες αν-ν $(\forall a, b \in R)$ αν $a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I$ ή $b \in I$

Ορισμός: Αν R: δακτύλιος τότε ένα ιδεώδες I του R καλείται μέγιστο αν-ν: (i) $I \neq R$ και (ii) αν J ιδεώδες του R ώστε $I \subseteq J \subseteq R \Rightarrow J = I$ ή $J = R$

Θεώρημα: Αν R: μεταθετικός δακτύλιος και I: ιδεώδες του R τότε: I μέγιστο $\Leftrightarrow$ $R \setminus I$: σώμα

Απόδειξη: $R\setminus I$: σώμα $\Leftrightarrow$ $R\setminus I$: απλός $\Leftrightarrow$ τα μόνα ιδεώδη του $R\setminus I$ είναι τα $\{0_{R\setminus I}\} = \{I\}$ και $R\setminus I$

$\Leftrightarrow$ τα μόνα ιδεώδη J του R για τα οποία ισχύει ότι $I \subseteq J \subseteq R$ είναι τα $J=I$ και $J=R$

$\Leftrightarrow$ το I: γνωστό και δεν υπάρχει ιδεώδες ~~το~~ J του R με: $J \neq I$, $J \neq R$ και $I \subseteq J \subseteq R$ αν-ν I: μέγιστο

Θεώρημα: Αν R: μεταθετικός δακτύλιος και I ιδεώδες του R, τότε: I πρώτο $\Leftrightarrow$ $R\setminus I$: ακέραια περιοχή.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι το I: πρώτο. Αν $a+I$, $b+I \in R\setminus I$, τότε $(a+I)\cdot(b+I) = 0_{R\setminus I} \Rightarrow ab+I = I \Leftrightarrow ab \in I$

$\xRightarrow{I:\text{πρώτο}} a \in I$ ή $b \in I \Rightarrow a+I = I$ ή $b+I = I$

$\Rightarrow a+I = 0_{R\setminus I}$ ή $b+I = 0_{R\setminus I}$. Άρα $R\setminus I$: ακέραια περιοχή

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι R/I: ακέραια περιοχή

Έστω $a, b \in R$: $ab \in I \Rightarrow ab + I = I \Rightarrow (a+I)\cdot(b+I) = I$

$\Rightarrow a \in I$ ή $b \in I \Rightarrow I$: πρώτο

Πρόταση: Σε έναν μεταθετικό δακτύλιο κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο

Απόδειξη: I: μέγιστο $\Rightarrow R/I$: σώμα $\Rightarrow R/I$: ακέραια περιοχή
$\Rightarrow I$: πρώτο

Σχόλιο: Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού $R = \mathbb{Z}$, $I = \{0\}$: πρώτο ιδεώδες
αλλά όχι μέγιστο

Παράδειγμα: $R = \mathbb{Z}$. Ιδεώδη του $\mathbb{Z}$: $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$n\mathbb{Z}$ μέγιστο $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: σώμα $\Leftrightarrow n$: πρώτος

$\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: ακέραια περιοχή

Το μηδενικό ιδεώδες $\{0\}$ του $\mathbb{Z}$: πρώτο

Τα μη-μηδενικά πρώτα ιδεώδη συμπίπτουν με τα μέγιστα ιδεώδη και αυτά είναι τα: $p\mathbb{Z}$, p: πρώτος

Ορισμός: Ένας μεταθετικός δακτύλιος R καλείται περιοχή κύριων ιδεωδών $\Leftrightarrow$ (α) R: ακέραια περιοχή
(β) Κάθε ιδεώδες του R είναι κύριο

Παράδειγμα: (1) $\mathbb{Z}$: περιοχή κύριων ιδεωδών

(2) Κάθε σώμα R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών $[\{0\}=(0)$ και $R=1_R\}$

Πρόταση: Αν R: σώμα τότε $R[x]$: περιοχή κύριων ιδεωδών

Πρόταση: Αν R: σώμα και I ιδεώδες του $R[x]$

τότε $\exists P(x) \in R[x] : I = (P(x))$

(1) Αν $P(x)=0$, τότε I: πρώτο

(2) Αν $P(x) \neq 0$, ~~τότε I: 1~~

τότε $(P(x))$ πρώτο $\Leftrightarrow$ $P(x)$ μέγιστο $\Leftrightarrow$ $P(x)$: ανάγωγο